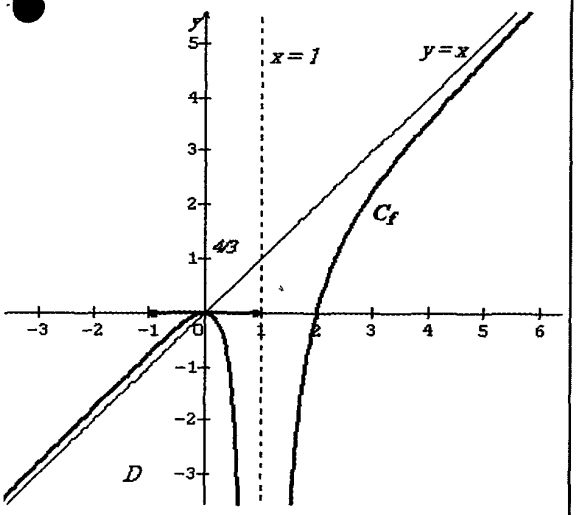
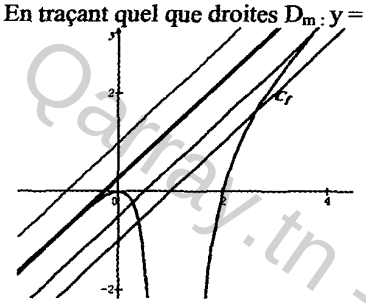


En traçant quel que droites $D_m : y = x + m$



On remarque que :

- Si $m = \frac{1}{4}$ ou m=0 : un seul point d'intersection
- Si $m < \frac{1}{4}$ et $m \neq 0$: deux points d'intersection
- Si $m > \frac{1}{4}$: aucun point d'intersection

Exercice n° 13 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

a) $Df = \{x \in IR ; x^2 - 2x - 3 \geq 0\}$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Signe de $x^2 - 2x - 3$	$+$	0		$-$	0	$+$	

D'où $\boxed{Df =]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[}$

b) $x \to x^2 - 2x - 3$: est continue et $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ pour tout $x \in Df =]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$ donc la fonction f est continue sur $Df =]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$

b)

$$\bullet \lim_{x \to (-1)^-} \frac{f(x) - f(1)}{x + 1} = \lim_{x \to (-1)^-} \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 0}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3}^2}{(x+1)\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

$$\lim_{x \to (-1)^-} \frac{(x \neq 1)(x-3)}{(x \neq 1)\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \lim_{x \to (-1)^-} \frac{(x-3)}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

Donc f non dérivable à gauche en (– 1)

Interprétation : C_f admet au point (-1 ;0) une demi - tangente verticales de même sans que $\vec{j}$

$$\bullet \lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 0}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3}^2}{(x-3)\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \lim_{x \to 3^+} \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

$$= \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Donc f non dérivable à droite en 3

Interprétation : C_f admet au point $(3 ; \hat{0})$ une demi - tangente verticales de même sans que $\vec{j}$

c) $\lim_{x \to +\infty} x^2 - 2x - 3 = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x^2 - 2x - 3 = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

a) $x^2 - 2x - 3 > 0$ pour tout $x \in]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$

Donc f est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$ et on a

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 2x - 3)'}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

$$= \frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

b)

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		‖		‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	‖		‖	$\nearrow$	$+\infty$
			0		0		

a) Pour tout $x \in Df =]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$ on a

$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x-1)^2 - 4$

Donc $f(x) = \sqrt{(x-1)^2 - 4}$

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} [f(x) - x + 1] = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 2x - 3} - (x - 1)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{(x-1)^2 - 4}^2 - (x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2 - 4} + (x-1)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)^2 - 4 - (x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2 - 4} + x - 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{-4}{\sqrt{(x-1)^2 - 4} + x - 1}}_{+\infty} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \to -\infty} [f(x) + x - 1] = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{(-x+1)^2 - 4} - (-x + 1)$$

Qarray.tn - Aqra Bech - Qarray.tn